Aufgabe 1 (*Abwickelbare Regelflächen*) (4 Punkte)
Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(s,t) = c(s) + tV(s)$ mit $c, V \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ und $|V(s)| = 1$ für alle $s \in I$, eine C^2-reguläre Regelfläche mit Gauss-Krümmung $K \equiv 0$. Zeigen Sie, dass eine Umparametrisierung $\phi : V \subset \mathbb{R}^2 \to I \times \mathbb{R}$ existiert, so dass die erste Fundamentalform der Fläche $\tilde{F} = F \circ \phi$ gegeben ist durch

$$\tilde{G} = (\delta_{ij}).$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz $\tilde{F}(s,t) = \tilde{c}(s) + tV(\phi(s))$ mit einer Funktion $\phi : J \subset \mathbb{R} \to I$. Die Kurve $\tilde{c}$ ist dabei die Bogenlängenparametrisierung einer Kurve $\overline{c}(s) = c(s) + \lambda(s)V(s)$, wobei die Funktion $\lambda : I \to \mathbb{R}$ so gewählt werden kann, dass $\langle \tilde{c}'(s), V(\phi(s)) \rangle = 0$ für alle $s \in I$.

Aufgabe 2 (*Assoziierte Familie von Minimalflächen*) (4 Punkte)
Für $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sei $X_\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X_\phi(u,v) := \begin{pmatrix} \sin\phi \cosh u \cos v + \cos\phi \sinh u \sin v \\ \sin\phi \cosh u \sin v - \cos\phi \sinh u \cos v \\ \sin\phi\ u + \cos\phi\ v \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

1. X_0 ist ein Helikoid und $X_{\frac{\pi}{2}}$ ein Katenoid (vgl. Serie 5, Aufgabe 3 und Serie 7, Aufgabe 1).
2. Die erste Fundamentalform von X_ϕ stimmt für alle ϕ überein.
3. Alle X_ϕ sind Minimalflächen.

Aufgabe 3 (*Eigenschaften der kovarianten Ableitung*) (4 Punkte)
Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ erfüllt die kovariante Ableitung $\nabla_\xi \eta$ folgende Rechenregeln:

(1) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$ für $\varphi \in C^1(U)$ (Linearität bzgl. Funktionen in ξ).

(2) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (D_\xi\varphi)\eta$ (Produktregel in η).

(3) $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1$ (Symmetrie).

Aufgabe 4 (*Parametertransformation*) (4 Punkte)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit zugehöriger kovarianter Ableitung ∇. Sei $\phi : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $\tilde{F} = F \circ \phi : V \to \mathbb{R}^3$ die umparametrisierte Fläche und $\tilde{\nabla}$ die zugehörige kovariante Ableitung. Sei $\psi : U \to V$ die Inverse von ϕ. Zeigen Sie:

1. Für alle C^1-Vektorfelder $X, Y : V \to \mathbb{R}^2$ gilt

   $$\tilde{\nabla}_X Y(p) = \Big(D\psi(\nabla_{D\phi(X)} D\phi(Y))\Big)(\phi(p)),$$

   wobei für ein C^0-Vektorfeld $X : V \to \mathbb{R}^2$ und einen glatten Diffeomorphismus $\phi : V \to U$ das Vektorfeld $D\phi(X) : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $D\phi(X)(\phi(p)) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial\phi}{\partial x^i}(p) X^i(p)$.

2. Seien $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\})$ die Christoffelsymbole der ersten Fundamentalform $\tilde{g}$. Zeigen Sie:

$$\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}(p) = \sum_{i,j,k=1}^{2} \Gamma^{k}_{ij}(\phi(p))\frac{\partial\phi^i}{\partial x^\alpha}(p)\frac{\partial\phi^j}{\partial x^\beta}(p)\frac{\partial\psi^\gamma}{\partial x^k}(\phi(p)) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2\phi^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}(p)\frac{\partial\psi^\gamma}{\partial x^i}(\phi(p)).$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 20.07.11.